

### Corrigés des exercices : Loi normale

---

**1.**  $X$  étant la variable “nombre de kilomètres avant le premier accident”,  $X$  suit la loi normale  $N(35000 ; 5000)$ . On sait qu'alors la variable centrée réduite associée  $X^* = \frac{X - 35000}{5000}$  suit la loi normale  $N(0 ; 1)$ .

1) On doit calculer  $p(X < 25000)$ .

$$\begin{aligned} p(X < 25000) &= p\left(X^* < \frac{25000 - 35000}{5000}\right) \\ &= p(X^* < -2) = p(X^* > 2) = 0.5 - p(0 < X^* < 2) \end{aligned}$$

en utilisant la symétrie. Puis on lit sur la table  $p(0 < X^* < 2) = 0.477$ .

On a donc  $p(X^* < -2) = 0.5 - 0.477 = 0.023$ .

Ainsi  $p(X < 25000) = 0.023$  : 2.3% des individus ont donc leur premier accident avant les 25000 km.

2) On doit calculer  $p(25000 < X < 40000)$ .

$$\begin{aligned} p(25000 < X < 40000) &= p\left(\frac{25000 - 35000}{5000} < X^* < \frac{40000 - 35000}{5000}\right) \\ &= p(-2 < X^* < 1) = p(-2 < X^* < 0) + p(0 < X^* < 1) \\ &= p(0 < X^* < 2) + p(0 < X^* < 1) \end{aligned}$$

en utilisant la symétrie pour le premier terme.

Puis on lit sur la table  $p(0 < X^* < 1) = 0.341$ . On a donc

$$p(X^* < -2) = 0.477 + 0.341 = 0.818.$$

Ainsi  $p(25000 < X < 40000) = 0.818$  : 81.8% des individus ont donc leur premier accident entre 25000 km et 40000 km.

3) On doit calculer  $p(X > 45000)$ .

$$\begin{aligned} p(X > 45000) &= p\left(X^* > \frac{45000 - 35000}{5000}\right) \\ &= p(X^* > 2) = 0.5 - p(0 < X^* < 2) \\ &= 0.5 - 0.477 = 0.023 \end{aligned}$$

Ainsi  $p(X > 45000) = 0.023$  : 2.3% des individus ont donc leur premier accident après 45000 km.

4) 75% des conducteurs ont eu leur premier accident avant un nombre de kilomètres noté  $x_1$ . Appelons  $z_1$  la valeur réduite associée à  $x_1$ . (On aura donc la relation  $z_1 = \frac{x_1 - 35000}{5000}$ ).

On a donc  $p(X < x_1) = 0.75$ , or  $p(X < x_1) = p(Z < z_1)$  donc  $p(Z < z_1) = 0.75$ . Par un dessin, on peut se convaincre que  $z_1$  doit être positif : en effet, l'aire hachurée qui vaut 0.75 est supérieure à 0.5.

$$p(0 < Z < z_1) = p(Z < z_1) - 0.5 = 0.25$$

Il reste donc à chercher 0.25 dans la table, mais, attention, 0.25 est ici la mesure d'une aire. Il faut donc chercher 0.25 "à l'intérieur" de la table (on y trouve en fait seulement 0.249). On lit alors  $z_1 = 0.67$ . Il suffit alors d'utiliser la relation  $z_1 = \frac{x_1 - 35000}{5000}$  pour trouver

$$x_1 = 5000z_1 + 35000 = 5000 \times 0.67 + 35000 = 38350$$

75% des conducteurs n'ont pas encore eu leur premier accident avant 38350 km.

**2.**  $X$  étant la variable masse en grammes, on définit la variable "masse réduite" notée  $Z$  par :  $Z = \frac{X - 500}{25}$ . La variable réduite  $Z$  suit la loi normale  $N(0; 1)$ .

1) On doit calculer  $p(480 < X < 550)$ .

La masse réduite associée à 480 est :  $\frac{480 - 500}{25} = -0.8$

La masse réduite associée à 550 est :  $\frac{550 - 500}{25} = 2$

$$p(480 < X < 550) = p(-0.8 < Z < 2) = p(0 < Z < 0.8) + p(0 < Z < 2) = 0.228 + 0.477 = 0.765$$

Le nombre de paquets pesant de 480 à 550 grammes est donc  $0.765 \times 2000 = 1530$ .

2) On doit calculer  $p(X > 550)$ .

$$p(X > 550) = p(Z > 2) = 0.5 - p(0 < Z < 2) = 0.5 - 0.477 = 0.023$$

Le nombre de paquets pesant plus de 550 grammes est donc :  $0.023 \times 2000 = 46$ .

3) Notons  $x_0$  le poids du plus léger des paquets parmi les 1000 plus lourds.

$$p(X > x_0) = \frac{1000}{2000} = 0.5, \text{ donc } x_0 \text{ est égal à la moyenne de } X, \text{ donc } x_0 = 500.$$

**3.**  $X$  étant la variable "âge à partir duquel apparaissent les premiers mots de vocabulaire" en nombre de mois, on définit la variable "âge réduit" par  $Z = \frac{X - 11.5}{3.2}$  :  $Z$  suit la loi normale  $N(0; 1)$ .

1) On doit calculer  $p(10 < X < 12)$ .

L'âge réduit associé à 10 est :  $\frac{10 - 11.5}{3.2} = -0.47$

L'âge réduit associé à 12 est :  $\frac{12 - 11.5}{3.2} = 0.16$

$$p(10 < X < 12) = p(-0.47 < Z < 0.16) = p(0 < Z < 0.47) + P(0 < Z < 0.16) = 0.181 + 0.064 = 0.245$$

24.5% des enfants prononcent donc leurs premiers mots entre la fin du 10ème mois et la fin du 12ème mois.

2) On doit calculer  $p(X > 13)$ .

L'âge réduit associé à 13 est :  $\frac{13 - 11.5}{3.2} = 0.47$

$$p(X > 13) = p(Z > 0.47) = 0.5 - p(0 < Z < 0.47) = .5 - 0.181 = 0.319$$

31.9% des enfants n'ont pas prononcé de mots au bout de 13 mois.

3) 25% des enfants n'ont pas encore prononcé leurs premiers mots avant un nombre de mois noté  $x_1$ . Appelons  $z_1$  la valeur réduite associée à  $x_1$ . (On aura donc la relation  $z_1 = \frac{x_1 - 11.5}{3.2}$ ).

On a donc  $p(X > x_1) = 0.25$ . Or  $p(X > x_1) = p(Z > z_1)$  donc  $p(Z > z_1) = 0.25$

Par un dessin, on peut se convaincre que  $z_1$  doit être positif : en effet, l'aire hachurée qui vaut 0.25 est inférieure à 0.5. Il reste donc à chercher 0.25 dans la table, mais, attention, 0.25 est ici la mesure d'une aire. Il faut donc chercher 0.25 "à l'intérieur" de la table (on y trouve en fait seulement 0.249). On lit alors  $z_1 = 0.67$ . Il suffit alors d'utiliser la relation  $z_1 = \frac{x_1 - 11.5}{3.2}$  pour trouver  $x_1 = 3.2z_1 + 11.5 = 3.2 \times 0.67 + 11.5 = 13.6$ .

25% des enfants n'ont pas encore prononcé leurs premiers mots au bout de 13.6 mois.

4) On a un quart des enfants après 13.6 mois, et donc trois quarts des enfants avant 13.6 mois : 13.6 mois correspond donc au 3ème quartile de la variable âge.

---

**4.** Notons  $X$  la variable "nombre de mois".  $X$  suit la loi normale  $N(36; 12)$ .

1) La proportion de couples se séparant entre 24 et 40 mois est  $p(24 < X < 40) = 0.47$  : cela correspond à 2350 couples.

2) La proportion de couples ne s'étant pas séparés au bout de 46 mois est  $p(X > 46) = 0.203$  : cela correspond à 1015 couples.

3) 10 ans correspondent à 120 mois. Par rapport à un écart-type de 12 mois, l'écart entre la moyenne et 120 mois est très grand : la proportion correspondante sera donc presque nulle. On peut donc estimer à un maximum de 1 le nombre de couples étant encore ensemble au bout de 10 ans (on peut le vérifier par le calcul).

4) 25% des couples se sont séparés au bout d'un nombre de mois noté  $x_1$ . Appelons  $z_1$  la valeur réduite associée à  $x_1$ . (On aura donc la relation  $z_1 = \frac{x_1 - 36}{12}$ ).

On a donc  $p(X < x_1) = 0.25$ . Or  $p(X < x_1) = p(Z < z_1)$  donc  $p(Z < z_1) = 0.25$

Par un dessin, on peut se convaincre que  $z_1$  doit être négatif : en effet, l'aire hachurée qui vaut 0.25 est inférieure à 0.5. On va donc déterminer l'opposé de  $z_1$  :  $-z_1$ .

$p(0 < Z < -z_1) = p(z_1 < Z < 0)$  par symétrie, avec  $p(z_1 < Z < 0) = 0.5 - p(Z < z_1) = 0.25$ .

Il reste donc à chercher 0.25 dans la table, mais, attention, 0.25 est ici la mesure d'une aire. Il faut donc chercher 0.25 "à l'intérieur" de la table (on y trouve en fait seulement 0.249). On lit alors  $-z_1 = 0.67$ . On en déduit alors  $z_1 = -0.67$ . Il suffit alors d'utiliser la relation  $z_1 = \frac{x_1 - 36}{12}$  pour trouver  $x_1 = 12z_1 + 36 = 12 \times (-0.67) + 36 = 27.96$ .

25% des couples sont donc séparés au bout de 28 mois.

---

**5.** Attention : la première chose à faire est de transformer toutes les données dans la même unité, en heure par exemple.

Notons  $X$  la variable “temps passé en heures” :  $X$  suit la loi normale  $N(3; 0.75)$ .

1) La proportion de personnes regardant moins de 2h est  $p(X < 2) = 0.092$  : le pourcentage correspondant est donc 9.2%.

La proportion de personnes regardant plus de 4h est  $p(X > 4) = 0.092$  : le pourcentage correspondant est donc 9.2%.

2) La proportion de personnes regardant entre 2h et 3h30 est  $p(2 < X < 3.5) = 0.657$  : le pourcentage correspondant est donc 65.7%.

3)  $Q_1 = 2.5$ ,  $Q_2 = 3$ ,  $Q_3 = 3.5$  : ces valeurs correspondent aux trois quartiles de  $X$ .

*Remarque* : Ayant calculé  $Q_1$ , comment trouver directement  $Q_2$  et  $Q_3$  ?

On sait que  $p(X < Q_1) = p(Q_1 < X < Q_2) = 0.25$ , donc

$$p(X < Q_2) = p(X < Q_1) + p(Q_1 < X < Q_2) = 0.25 + 0.25 = 0.5$$

Donc  $p(X < Q_2) = 0.5$  signifie que  $Q_2$  est la médiane de  $X$ , et la médiane pour une loi normale est également la moyenne, donc  $Q_2 = 3$  ; aucun calcul n'est nécessaire.

$p(Q_1 < X < 3) = p(3 < X < Q_3)$  :  $Q_1$  et  $Q_3$  sont donc symétriques par rapport à la moyenne de  $X$ ,  $Q_1$  étant inférieur à la moyenne et  $Q_3$  supérieur. Or  $3 - Q_1 = 0.5$  donc  $Q_3 = 3 + 0.5 = 3.5$ .

---

**6.** Notons  $X$  la variable “Écart entre les deux naissances en jours”.  $X$  suit la loi normale  $N(890; 75)$ .

1) La proportion de familles ayant attendu au moins 3 ans avant d'avoir le second enfant est  $p(X > 1095) = 0.003$ , ce qui correspond à 750 familles.

2) La proportion de familles ayant attendu au plus un an avant d'avoir le second enfant est  $p(X < 365) = 0$ , ce qui correspond à 0 famille.

3) La proportion de familles dont l'écart entre les deux naissances est de deux ans est  $P(X = 730) = 0$ , ce qui correspond à 0 famille.

---

**7.** Notons  $X$  la variable “taux de réussite en %” :  $X$  suit la loi normale  $N(30; 2.5)$ .

1) La proportion d'épreuves ayant un taux de réussite compris entre 31% et 35% est  $p(31 < X < 35) = 0.322$ .

2) La proportion d'épreuves ayant un taux de réussite inférieur à 35% est  $p(X < 35) = 0.977$ .

3) La proportion d'épreuves ayant un taux de réussite supérieur à 32% est  $p(X > 32) = 0.212$ .

4) La valeur  $a$  cherchée vérifie  $p(X > a) = 0.2$ . On trouve  $a = 32.1$ .

---

**8.** La valeur réduite de 190 est :  $\frac{190 - 180}{10} = 1$ .

Le pourcentage de filles dont le score est supérieur à celui de la moyenne des garçons s'écrit :

$$p(X > 190) = 0.5 - p(180 < X < 190)$$

mais  $p(180 < X < 190) = p(0 < Z < 1) = 0.341$ . On a  $p(X > 190) = 0.159$ , soit 15.9%, ce qui correspond à 95 filles.

La valeur réduite de 180 est :  $\frac{180 - 190}{15} = 0.67$ .

Le pourcentage de garçons dont le score est inférieur à celui de la moyenne des filles s'écrit :

$$p(Y < 180) = p(Z < -0.66)$$

Par symétrie,  $p(Z < -0.66) = p(Z > 0.66)$  et  $p(Z > 0.66) = 0.5 - p(0 < Z < 0.66) = 0.5 - 0.245 = 0.255$ , soit 25.5%, ce qui correspond à 204 garçons.

---

**9.** Notons  $z_1, z_2, z_3, z_4$  les valeurs réduites de  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

On a  $p(100 < X < s_3) = p(0 < Z < z_3) = 0.25$ . La table donne  $z_3 = 0.67$  et par symétrie,  $z_2 = -0.67$ .

On a  $x_3 = 0.67 \times 15 + 100 = 110.05$  et  $x_2 = -0.67 \times 15 + 100 = 89.95$ .

On a  $p(100 < X < s_4) = p(0 < Z < z_4) = 0.375$ . La table donne  $z_4 = 1.15$  et par symétrie,  $z_1 = -1.15$ .

On a  $x_4 = 1.15 \times 15 + 100 = 117.25$  et  $x_1 = -1.15 \times 15 + 100 = 82.75$ .

On a donc  $p(X < 82.5) = 12.5\%$ ,  $p(X < 89.95) = 25\%$ ,  $p(X < 110.05) = 75\%$ ,  
 $p(X < 117.25) = 87.25\%$ .

---

**10.** 1) La valeur  $s_1$  vérifie  $p(Z > s_1) = 0.05$ .

On a donc  $p(0 < Z < s_1) = P(Z > 0) - p(Z > s_1) = 0.5 - 0.05 = 0.45$ . Par lecture inverse de la table de la loi  $N(0; 1)$ , on obtient donc  $s_1 = 1.64$  : 5% des personnes de cette population ont donc un indice de stress supérieur à 1.64.

2) La valeur  $s_2$  vérifie  $p(Z < s_2) = 0.95$ . On a donc  $p(Z > s_2) = 1 - P(Z < s_2) = 0.05$ . On a donc  $s_2 = s_1 = 1.64$  : 95% des personnes de cette population ont donc un indice de stress inférieur à 1.64.

3) La valeur  $s_3$  vérifie  $p(Z < s_3) = 0.05$ . On a donc  $p(Z > -s_3) = 0.05$ . On a donc  $s_3 = -s_1 = -1.64$  : 5% des personnes de cette population ont donc un indice de stress inférieur à -1.64.

4) La valeur  $s_4$  vérifie  $p(Z > s_4) = 0.95$ . On a donc  $p(Z < s_4) = 1 - P(Z > s_4) = 0.05$ . On a donc  $s_4 = s_3 = -1.64$  : 95% des personnes de cette population ont donc un indice de stress supérieur à -1.64.

5) La valeur  $s_5$  vérifie  $p(-s_5 < Z < s_5) = 0.95$ . On a donc  $p(0 < Z < s_5) = 0.475$ . Par lecture inverse de la table de la loi  $N(0; 1)$ , on obtient donc  $s_5 = 1.96$  : 95% des personnes de cette population ont donc un indice de stress compris entre -1.96 et 1.96.

6) On a donc  $s_6 = s_5 = 1.96$  : 5% des personnes de cette population ont donc un indice de stress en dehors de  $[-s_6; s_6]$ .

---

---